(Op)lax Twisted Arrow (∞, n)-categories and Their Dualizability

千葉大学 融合理工学府 数学情報科学専攻数学・情報数理学コース
赤坂奎茉 (Keima AKASAKA) *

概要

本論文では，捩れ射圏 $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})$ の (op)lax 高次圏論的な一般化として，任意の (∞, n)-圏 $\mathcal{C}$ に付随する (op)lax 捩れ射 (∞, n)-圏 $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}}$ と $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{oplax}}$ を定義した．さらに $\mathcal{C}$ が対称モノイダルである場合には，これらに自然な対称モノイダル構造が誘導されることを示した．また，位相的場の量子論とコボルディズム仮説から，この構成が双対可能性の情報をどの程度保存するかを調べた．応用として，Gaiotto–Johnson-Freyd [GJ25] による凝縮化の情報をエンコードする (∞, n)-圏 $\clubsuit_n$ が，$\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}}$ の構成を真似して得られる (∞, n)-圏から復元できることを示した．

1 導入

通常の 1-圏 $\mathcal{C}$ に対して，射 1-圏 $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$ と捩れ射 1-圏 $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})$ は次のように定義される：$\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$ および $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})$ の対象はともに $\mathcal{C}$ の射 $f \colon x \to y$ である．$\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$ (resp. $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})$) における f から $f' \colon x' \to y'$ への射は，次の $\mathcal{C}$ における可換正方形で与えられる：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & y \arrow[d, "\beta"] \\ x' \arrow[r, "f'"'] & y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] & y \arrow[d, "\beta"] \\ x' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f'"'] & y' \end{tikzcd}$$

([kerodon, Construction 00AZ] を参照)．これらの構成は基本的であるが非常に有用である．例えば，自然な射影 $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}$ は hom 双関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ の Grothendieck 構成として理解できる．

これらの構成を 2-圏 $\mathbb{C}$ へ一般化する際には，(op)lax 正方形を許すことで可換性を緩めることができる．具体的には，$\mathbb{C}$ における *lax* (resp. *oplax*) 正方形とは，次の $\mathbb{C}$ における 2-射である：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\theta_{0;1}"] \arrow[d, "\alpha"'] & y \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\theta_{1;1}}{\Swarrow}"] \\ x' \arrow[r, "\theta'_{0;1}"'] & y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\theta_{1;0}"] \arrow[d, "\alpha"'] & y \arrow[d, "\beta"] \\ x' \arrow[r, "\theta'_{1;0}"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\theta_{1;1}}{\Nearrow}"] & y' \end{tikzcd}$$

* E-mail:quasi.cosmoi@gmail.com

(Op)lax 正方形を 1-射として用いることで, $(op)lax$ 射 2-圏 $\mathrm{Ar}(\mathbb{C})^{\mathrm{lax}}$ と $\mathrm{Ar}(\mathbb{C})^{\mathrm{oplax}}$ を得る．これらの対象はいずれも $\mathbb{C}$ の 1-射であり, 1-射は (op)lax 正方形, 2-射は $\mathbb{C}$ における可換円柱 (すなわち正方形どうしの間の整合的な 2-射) で与えられる．

同様に, 1-圏の場合の構成にならって左側の縦の 1-射を反転させることで, *lax* (resp. *oplax*) 捩れ正方形を, 次の $\mathbb{C}$ の 2-射として定義する:

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\omega_{0;1}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \omega_{1;1}"] & y \arrow[d, "\beta"] \\
x' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\omega'_{0;1}"'] & y'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\psi_{1;0}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \psi_{1;1}"] & y \arrow[d, "\beta"] \\
x' \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\psi'_{1;0}"'] & y'
\end{tikzcd}
$$

これにより, $(op)lax$ 捩れ射 2-圏 $\mathrm{TwAr}(\mathbb{C})^{\mathrm{lax}}$ と $\mathrm{TwAr}(\mathbb{C})^{\mathrm{oplax}}$ を得る．これらの構成はいずれも, n-圏へと自然に拡張される．

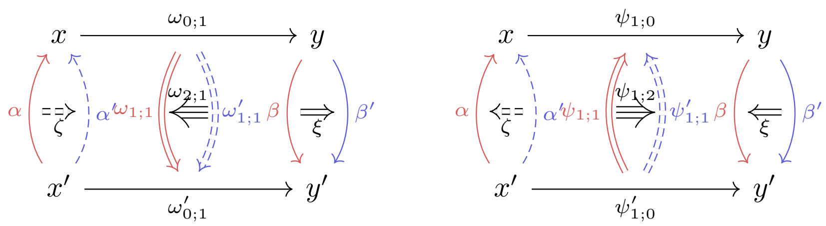
一方で, これらには ∞-圏論的な類似物も存在する．∞-圏 $\mathcal{C}$ に対して, 射 ∞-圏 $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$ と捩れ射 ∞-圏 $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})$ を得る ([kerodon, Construction 03JG] を参照)．$(\infty,1)$-圏論的な一般化と (op)lax な n-圏的な一般化とを組み合わせることで, $(op)lax$(捩れ) 射 (∞,n)-圏を考えることができる．Johnson-Freyd と Scheimbauer は, (∞,n)-圏 $\mathcal{C}$ に対して, $(op)lax$ 射 (∞,n)-圏 $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})^{\mathrm{lax}}$ および $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})^{\mathrm{oplax}}$ を定義した [JS17]．本研究では, この構成の捩れ射圏に対応するものを構成し, 数理物理における位相的場の量子論と凝縮化の理論への応用を示した．

2 主定理

本研究では, (∞,n)-圏に付随する $(op)lax$ 捩れ射 (∞,n)-圏

$$\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}} \quad \text{and} \quad \mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{oplax}}$$

を定義した．具体的には, $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}}$ と $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{oplax}}$ の対象および 1-射は, 上で述べたものと同じパターンで与えられる．さらに, $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}}$ (resp. $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{oplax}}$) における 2-射は, 次の $\mathcal{C}$ における 3-射によって定義される:



この構成は, Nuiten による lax 捩れ射 $(\infty,2)$-圏 [Nui23] の自然な一般化になっている．また, 捩れ射 1-圏を用いた通常の (co)slice 圏の構成と同様に, $(op)lax$ $(co)slice$ (∞,n)-圏を定義できる．

以下が本論文の第一主定理である．

Theorem 1. 任意の (∞,n)-圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}}$ および $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{oplax}}$ は well-defined であり, 実際に (∞,n)-圏である．$\mathcal{C}$ が対称モノイダル構造をもつとき, $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}}$ と $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{oplax}}$ には自然な対称モノイダル構造が誘導される．

(∞,n)-圏論は, 位相的場の量子論 (TQFT) の研究において中心的な役割を果たす. 対称モノイダル (∞,n)-圏 $\mathcal{C}$ に対し, $\mathcal{C}$ に値をとる *TQFT* とは, 枠付きボルディズムの対称モノイダル (∞,n)-圏から $\mathcal{C}$ への対称モノイダル関手である [Lur09]. しかし一般に, このような関手を手作業で明示的に構成するのはほとんど不可能である. コボルディズム仮説は, TQFT が $\mathcal{C}$ の n-双対可能対象によって決定されることを主張する.

$(\infty,2)$-圏 $\mathbb{C}$ に対して, 1-射が右 (resp. 左)1-随伴可能であるとは, 三角恒等式を満たす「右」(resp.「左」) 随伴をもつことをいう. 対称モノイダル (∞,n)-圏 $\mathcal{C}$ に対して, 対象が 1-双対可能であるとは, $(\infty,n+1)$-圏 $B\mathcal{C}$ における 1-射として見たときに, 右および左 1-随伴可能であることをいう. 定義を繰り返すことで, 対象の n-双対可能性を定義することができる. コボルディズム仮説から, TQFT を構成するためには新たに構成した (∞,n)-圏がどの程度双対可能性の情報が遺伝されるかを調べることは重要である.

以下が本論文の第二主定理である.

Theorem 2. $\mathcal{C}$ を対称モノイダル (∞,n)-圏とし, $f\colon x\to y$ を $\mathcal{C}$ の 1-射とする. $\mathrm{TwAr}(\mathcal{C})^{l,\mathrm{lax}}$ の対象としての f が 1-双対可能のとき, x と y は $\mathcal{C}$ において 1-双対可能であり, f は $\mathcal{C}$ において左 1-随伴可能である. しかし一般には, その逆は成り立たない.

応用として, Gaiotto と Johnson-Freyd [GJ25] による凝縮化の情報をエンコードする (∞,n)-圏 $\clubsuit_n$ が, lax 正方形と oplax 正方形を組み合わせて構成される (∞,n)-圏 $\Gamma^{(n);(1)}$ から復元できることを示した. 凝縮化の理論は (∞,n)-圏における冪等完備化を定式化するための枠組みを与える. 数理物理においては, 適切な代数的データを「凝縮」させることによって, 新しいトポロジカル相や境界条件, 欠陥がどのように現れるかを記述することに用いられる.

以下が本論文の第三主定理である.

Theorem 3. 次の anima の同値が存在する.

$$\mathrm{Map}_{\mathrm{Fun}(\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op},n},\mathrm{An})}(\clubsuit_n,\mathcal{C})\simeq\mathrm{Map}_{\Gamma^{(n);(1)}}(\mathrm{id}_x,\mathrm{id}_y).$$

References

[GJ25] Davide Gaiotto and Theo Johnson-Freyd. *Condensations in higher categories*. 2025. arXiv: 1905.09566 [math.CT]. URL: https://arxiv.org/abs/1905.09566.

[JS17] Theo Johnson-Freyd and Claudia Scheimbauer. "(Op)lax natural transformations, twisted quantum field theories, and "even higher" Morita categories". In: *Advances in Mathematics* 307 (Feb. 2017), pp. 147–223. ISSN: 0001-8708. DOI: 10.1016/j.aim.2016.11.014. URL: http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2016.11.014.

[kerodon] Jacob Lurie. *Kerodon*. https://kerodon.net. 2025.

[Lur09] Jacob Lurie. *On the Classification of Topological Field Theories*. 2009. arXiv: 0905.0465 [math.CT]. URL: https://arxiv.org/abs/0905.0465.

[Nui23] Joost Nuiten. *On straightening for Segal spaces*. 2023. arXiv: 2108.11431 [math.CT]. URL: https://arxiv.org/abs/2108.11431.